

Einleitung

Diese Seiten sind Zusatzlektionen und Übungen für mathematisch fortgeschrittene Kinder in der 4. bis 5. Klasse. Sollen Kinder sich im Millionenraum wohl fühlen, sie sollen sowohl Bruchteile als auch Dezimale gesehen haben (diese werden hier kurz diskutiert), und sie sollen alle normalen mathematischen Berechnungen (inklusive Division) können.

Wenn Ihre Kind abstrakte Probleme bisher nicht begegnet hat, wird es sicherlich zuerst Schwierigkeiten haben. In der Primarschule lernen Kinder Mathe als ein mechanisches System. Wir wollen hier den nächste Schritt nehmen und abstraktes Denken fördern.

Mathe macht Spass! Wenn jemand selber Mathe ungerne hat, sollte diese Person bitte es nicht versuchen, Mathe zu unterrichten. Macht Mathe dem Lehrer Spass, so wird es den Kindern auch!

Lektionen: Die Lektionen sollen an die Tafel präsentiert werden – es gibt Aspekte, die den Lehrer erklären muss. Die Kinder sollen Kopien der Unterlagen bekommen, aber es ist nicht erwartet, dass die Kinder diese alleine und ohne Hilfe verstehen können.

Übungen: Die Übungen sind unter Aufsicht des Lehrers zu lösen – der Lehrer soll sicherstellen, dass die Kinder die Techniken verstanden haben und korrekt einsetzen. Es ist sinnlos, wenn ein Kind in eine Sackgasse landet und nicht weiter kommt. Das gesagt, es ist auch wichtig, dass Kinder ihre eigenen Lösungswege finden.

Hausaufgaben: Optional kann der Lehrer zusätzliche Übungen entwickeln, die als Hausaufgaben gegeben werden können.

Copyright: 2007/2008 von Brad Richards (<http://richards.kri.ch/>)

Lizenz: Creative Commons. Diese Unterlagen dürfen Sie kostenlos verwenden und weitergeben, solange der Copyright und diese Lizenz vorhanden sind. Ohne Bewilligung des Autors dürfen diese Unterlagen nicht für kommerzielle Zwecke verwendet werden.

Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Lektion

Eine Primzahl ist eine Zahl mit genau zwei Teilern, nämlich 1 und sich selbst. Unsere Suche nach Primzahlen beginnt mit 2

2 ist eine Primzahl – es gibt nur die Teiler 1 und 2

3 ist eine Primzahl – es gibt nur die Teiler 1 und 3

4 ist keine Primzahl – 2 ist ein Teiler von 4

5 ist eine Primzahl – es gibt nur die Teiler 1 und 5

6 ist keine Primzahl – 2 und 3 sind beide Teiler von 6

Primzahlen sind spezielle Zahlen. Sie sind die kleinsten Teiler von allen anderen Zahlen. Wenn man eine Zahl vollständig in Primzahlen „auseinandernimmt“, nennt man dies die „Primfaktorzerlegung“. Das Ziel der Primfaktorzerlegung ist die Darstellung einer Zahl als ein Produkt von Primzahlen. Drei Beispiele:

Die Primfaktorzerlegung von 15: $3 \cdot 5$ Also 3 mal 5 gibt 15

Die Primfaktorzerlegung von 21: $3 \cdot 7$ Also 3 mal 7 gibt 21

Die Primfaktorzerlegung von 35: $5 \cdot 7$ Also 5 mal 7 gibt 35

Oft muss man durch mehrere Schritte gehen. Als Beispiel, suchen wir die Primfaktoren von 60.

60 ist eine gerade Zahl: $60 = 2 \cdot 30$.

30 ist keine Primzahl: $30 = 2 \cdot 15$ (Also: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 15$)

15 ist keine Primzahl: $15 = 3 \cdot 5$ (Also: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$)

2, 3 und 5 sind alle Primzahlen. Die Primfaktorzerlegung von 60 ist $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Hier sind 2 weitere Beispiele:

$250 = 10 \cdot 25$, aber 10 und 25 haben selber Teiler. $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$385 = 5 \cdot 77$, aber $77 = 7 \cdot 11$. Also $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

Übungen

1. Finde die ersten 10 Primzahlen: 2, 3, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____

2. Was ist die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen:

33 =

20 =

210 =

3. Ergänze die folgenden Sequenzen:

8, 12, ____, 28, ____, 52, ...

6, 9, 15, 25, ____, 49, ____, ...

Faktoren finden

Lektion

Bevor wir mühsam versuchen, eine Zahl durch eine Primzahl zu dividieren, wäre es schön zu wissen, ob es überhaupt geht?

Wie kann man möglichst schnell feststellen, ob eine Primzahl ein Teiler ist? Dazu gibt es viele Tricks...

2 als Teiler

Alle gerade Zahlen haben 2 als Teiler.

3 als Teiler

Alle Ziffer der Zahl zusammenzählen. Wenn diese neue Zahl 3 als Teiler hat, ist 3 als Teiler der ursprünglichen Zahl.

Beispiel: ist 3 Teiler von 84?

$8 + 4 = 12$, und wir wissen, dass $12 : 3 = 4$. Also kann man 84 mit 3 dividieren.

Beispiel: hat 967482 den Primfaktor 3?

$9 + 6 + 7 + 4 + 8 + 2 = 36$, und wir wissen dass $36 : 3 = 12$.

Also, 3 ist Teiler von 967482

5 als Teiler

Alle Zahlen, die mit 0 oder 5 enden, haben 5 als Teiler.

7 als Teiler

Trenne den letzten Ziffer von der Zahl und verdoppele den Ziffer. Berechne die Differenz dieser Zahlen.

Beispiel: von 238 bekommen wir 23 und 16. Die Differenz $23 - 16 = 7$

Ist die Differenz teilbar durch 7? Falls ja, hat auch die ursprüngliche Zahl 7 als Teiler.

Beispiel: von 175 bekommen wir $17 - 10 = 7$. Also ist 175 teilbar durch 7 !!

Beispiel: von 203 bekommen wir $20 - 6 = 14$. Also ist 203 teilbar durch 7 !!

Beispiel: von 10332 bekommen wir $1033 - 4 = 1029$. Immer noch zu schwierig...

Wiederholen: von 1029 bekommen wir $102 - 18 = 84$. Immer noch zu schwierig...

Wiederholen: von 84 bekommen wir $8 - 8 = 0$. Das zählt ($0:7 = 0$) !!

Übungen

1. Welche der folgenden Zahlen haben 3 als Teiler?

a. 847

b. 654

c. 98478654

d. 98478655

2. Welche der folgenden Zahlen haben 7 als Teiler?

a. 315

b. 577829

c. 4580

d. 1043

3. Was ist die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen?

a. 60

b. 245

c. 43

d. 78

e. 336

f. 95

Vergleiche

Lektion

Es kommt oft vor, dass man zwei Angebote miteinander vergleichen muss.

Beispiel: du gehst zum Laden, um Milch zu kaufen. Du kannst 1 Liter für Fr. 2 haben, oder 6 Liter für Fr. 11. Wenn du 6 Liter brauchst, ist das 6er Angebot günstiger.

Es ist nicht immer so einfach. Es gibt auch Situationen wo das erste Angebot in einer Situation günstiger ist, und das zweite in einer anderen Situation.

Für eine allgemeine Lösung müssen wir den Punkt finden, wann die Angebote gleich teuer sind.

Problem: du hast ein Mobiltelefon und verschickst viele SMS Nachrichten. Es gibt zwei Angebote: du bezahlst Fr. 10/Monat plus Fr. 0.20 pro SMS, oder du bezahlst Fr. 20/Monat plus Fr. 0.10 pro SMS.

- Wenn du keine SMS verschickst, ist das erste Angebot billiger (Fr. 10 statt Fr. 20).
- Wenn du 1000 SMS sendest, ist das zweite Angebot billiger (Fr. 120 statt Fr. 210)

Mit wie vielen SMS sind die zwei Angebote gleich teuer? Wenn wir dies wissen, können wir alle anderen Fragen beantworten. Wenn du weniger SMS brauchst, ist das erste Angebot besser, sonst das zweite.

- Die Monatsgebühr des 2. Angebots ist Fr. 10 teurer
- Die SMS-Gebühr des 2. Angebots ist Fr. 0.10 günstiger
- Wie viele SMS müssen wir verschicken, um die Monatsgebühr auszugleichen?
Das sind ($10 / 0.10 = 100$) 100 SMS.

Kontrollieren wir:

- Mit dem 1. Angebot: $Fr. 10 + 100 * Fr. 0.20 = Fr. 30$
- Mit dem 2. Angebot: $Fr. 20 + 100 * Fr. 0.10 = Fr. 30$

Resultat: mit 100 SMS sind die Angebote gleich: mit weniger SMS sollen wir das 1. Angebot nehmen, mit mehr sollen wir das 2. Angebot nehmen.

Übung: Billets bei der SBB

Brad wohnt in Schönenwerd und arbeitet in Basel. Er möchte so günstig wie möglich mit der Bahn reisen. Auf der Website der SBB stehen die folgenden Preisen:

- Ein normales Billet (hin und zurück) kostet Fr. 40
- Kauft er einen „Halbtax“ für Fr. 150, kostet ein Billet nach Basel nur noch Fr. 20
- Wenn er ein „GA“ Für Fr. 2995 kauft, darf er so viel reisen wie er will, ohne Billet

1. Wie viele Reisen muss Brad machen, damit es sich lohnt, einen Halbtax zu kaufen?

2. Wie viele Reisen muss Brad machen, damit ein GA günstiger als ein Halbtax ist?

Die SBB hat ein neues Angebot: wenn man 5 Billets kauft, bekommt man ein 6. Billet gratis. D.h., Brad kann 6mal nach Basel reisen, und nur 5 Billets Zahlen. Dieses Angebot gilt sowohl für normale Billets als auch für Billets mit einem Halbtax. *Bemerkung: man muss Bruchteile beherrschen, um die folgenden zwei Übungen machen zu können.*

3. Mit diesem Angebot, wie viele Reisen muss Brad machen, damit ein Halbtax sich lohnt?

4. Mit diesem Angebot, wie viele Reisen muss Brad machen, damit ein GA sich lohnt?

Berechnung von Flächen

Lektion

Definitionen:

Was ist ein Quadratmeter? Eine Fläche 1m breit und 1m hoch.

Was ist ein Quadratzentimeter? Eine Fläche 1cm breit und 1cm hoch.

Frage: Wie viele Quadratzentimeter gibt es in einem Quadratmeter?

Wenn du Guetzli (auf deutsch etwa „Keks“) backst, wie viel Teig brauchst du, um wie viele Guetzli zu bekommen? Diese Frage ist schwieriger als man denkt!

Fangen wir mit einem einfacheren Problem an

„Du hast eine Menge Plättli, jeweils 10cm x 10cm gross. Du solltest eine Fläche von einem Quadratmeter mit den Plättli abdecken. Wie viele Plättli brauchst du?“

Wenn du auf die Antwort $10 \cdot 10 = 100$ kommst, bist du richtig! Eine Fläche ist 2-dimensionell – wir brauchen 10 Plättli in einer Reihe für die Breite und 10 Reihen für die Höhe. Also 10 mal 10.

„Mit den gleichen Plättli sollst du nun eine Fläche 2 meter breit und 2 meter hoch abdecken. Wie viele Plättli brauchst du?“

Die Fläche ist doppel so breit und doppel so hoch. Wir brauchen $2 \cdot 2 = 4$ mal so viele Plättli, insgesamt 400 davon.

Übung an der Tafel

Jetzt kommen wir zu den Guetzli!

Du machst Guetzli, und hast insgesamt 1 Liter Teig gemacht.

Weisst du, dass 1 Liter ein Block von 10cm x 10cm x 10cm ist?

1. Wenn du das Teig 5mm dick ausrollst, wie gross ist die Fläche, die du bekommst
2. Nimmst du die Antwort von (1). Ein Guetzli ist ein Quadrat 5cm x 5cm. Wie viele Guetzli kannst du machen?
3. Du brauchst 160 Guetzli – wie dick muss das Teig sein?

Antworten

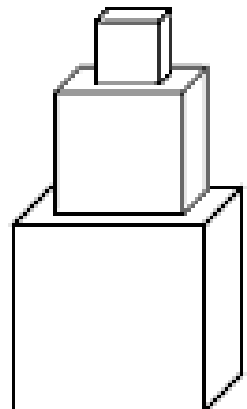
1. 0.2 Quadratmeter oder 2000 Quadratzentimeter.
2. Ein Güetzli ist 25 Quadratzentimeter. $2000 : 25 = 80$.
3. Das sind doppel so viele, also sind sie halb so dick, d.h. 2.5mm

Übung

Du hast drei grosse Würfel: der erste ist 1m hoch, 1m tief und 1m breit. Der zweite ist 2m mal 2m mal 2m, und der dritte ist 3m x 3m x 3m. Um den kleinsten Würfel zu malen (oben, unten und vier Seiten) braucht man 1 Liter Farbe.

a) Wie viel Farbe braucht man, um alle drei Würfel zu malen?

b) Die Würfel werden zuerst in einem Turm zusammengeklebt, bevor man sie malt. Wie viel Farbe braucht man, um den Turm zu malen?



Schöne Probleme 1

1. Häsch Münz?

In einem Schweizer Franken gibt es 100 Rappen (als Rp abgekürzt). Es gibt Münzen mit den folgenden Werten:

5Rp, 10Rp, 20Rp, 50Rp, Fr 1, Fr 2 und Fr 5

Du hast etwas in einem Laden gekauft, und es kostet 15Rp. Wenn du diesen Betrag genau bezahlen möchtest, hast du insgesamt nur zwei Möglichkeiten:

3 Münzen im Wert von 5Rp

1 Münze im Wert von 5Rp und 1 Münze im Wert von 10Rp

Das sind die einzigen Kombinationen von Münzen, die 15Rp ergeben.

a) Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es, die 25Rp ergeben?

b) Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es, die 30rp ergeben?

c) Du hast nur 20Rp und 50Rp Münzen. Welche der folgenden Beträge kannst du genau bezahlen? Markiere die Beträge mit „ja“ oder „nein“

80Rp?

85Rp?

90Rp?

110Rp?

2. Mäuse-Guetzli

Fünf Mäuse (Arnie, Betty, Carl, Debby und Ernie) rennen mehrmals durch einen Irrgarten. Jedes Mal bekommen sie ein Guetzli.

- Arnie hat vier mehr Guetzli als Betty.
- Betty hat sieben weniger als Carl
- Carl hat fünf mehr als Debby
- Debby hat drei mehr als Ernie
- Betty und Debbie zusammen haben 10 Guetzli.

Wie viele Guetzli hat jede Maus?

Arnie:

Betty:

Carl:

Debby:

Ernie:

3. Und jetzt?

Was ist die nächste Zahl in jeder der folgenden Sequenzen?

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, _____

b) 1, 2, 4, 8, 13, 20, 28, _____

c) 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, _____

d) 1, 2, 4, 8, 16, 32, _____

e) 1, 2, 6, 24, 120, _____

f) Denk an die schriftliche Darstellung der Zahlen: eins, zwei, drei, vier, usw. Was ist die nächste Zahl in dieser Sequenz?

8, 3, 1, 5, 9, 6, 7, 4, _____

Multiplikation von Bruchteilen

Lektion

Wenn du ein Kuchen verteilst, scheidest du das Kuchen in Stücke. Diese sind Bruchteile vom Kuchen. Schneidest du das Kuchen in 4 Stücke, ist dann jedes Stück $\frac{1}{4}$ vom Kuchen. Wenn du $\frac{1}{4}$ des Kuchens hat, und dein Hund die Hälfte frisst, wie viel Kuchen hast du noch?

Was ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$? Um dies zu berechnen, muss man die Bruchteile multiplizieren. Wie geht das? Etwa so:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(1 \times 1)}{(2 \times 4)} = \frac{1}{8}$$

Die oberen Teile werden miteinander multipliziert, und die unteren Teilen auch. Die Resultate geben den neuen Bruchteil.

Noch ein Beispiel:

„Wenn ich zum Bahnhof gehe, brauche ich halb so lang mit meinem Vello als wenn ich zu Fuss gehe. Wenn ich mit dem Auto fahre, brauche ich zwei-drittel der Zeit, die ich mit dem Vello brauche. Welcher Bruchteil der Zeit brauche ich mit dem Auto im Vergleich zu der Zeit, die ich Fuss brauche?“

Antwort: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Übungen

Um die folgenden Fragen zu beantworten, musst du Bruchteile multiplizieren:

a) Jewel ist $\frac{1}{10}$ so schwer wie Polo und eine Maus ist $\frac{1}{20}$ so schwer wie Jewel. Wie Schwer ist eine Maus im Vergleich zu Polo?

b) Aiden ist $\frac{3}{8}$ so schwer wie Brad, und Tynan ist $\frac{7}{8}$ so schwer wie Aiden. Wie schwer ist Tynan im Vergleich zu Brad?

c) Berechnen: $\left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{5}{3}\right)$

d) Die Antwort in (c) kannst du vereinfachen. D.h., du kannst den gleichen Wert mit kleineren Zahlen darstellen. Wie?

Und „just for fun“ ...

Vier Kinder reden miteinander – sie vergleichen ihre Lieblingsfarben, ihre Hobbys und ihre Alter.

- Ihre Namen: Tom, Sue, Fred und Ann
- Ihre Alter: 6, 8, 9, 11
- Ihre Lieblingsfarben: Blau, Grün, Orange, Rot
- Ihre Hobbys: Fussball, Basketball, Unihockey, Volleyball

Und die Hinweise

- Tom ist älter als die zwei Mädchen, und der Ball in seiner Hobby ist normalerweise in seiner Lieblingsfarbe.
- Das Kind, das Volleyball spielt, hat einen ungerades Alter.
- Fred ist der jüngste, und hasst rot.
- Ann hat ihren eigenen Stock in ihrer Lieblingsfarbe grün.

Kannst du herausfinden, welche Kinder mit welchen Farben, Alter und Hobbys zusammengehören?

Berechnung von Volumen

Lektion

Wie gross ist ein Behälter? Wenn man die Breite, die Tiefe und die Höhe weiss, kann man das Volumen des Behälters berechnen.

Beispiel

Du hast eine wasserdichte Kiste 1m breit, 1m tief und 1m hoch. Wenn du diese Kiste mit Wasser füllst, wie viel Wasser hast du?

- $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ gibt ein Kubikmeter – dies ist das Volumen (die Grösse) der Kiste
- 1 Liter Wasser wäre $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$
- Es gibt entsprechend $10 \times 10 \times 10 = 1000$ Liter Wasser in der Kiste
- 1 Liter Wasser wiegt 1kg – es gibt genau 1 Tonne Wasser in der Kiste

Was man immer im Kopf halten muss:

Eine Länge ist eindimensional

Eine Fläche ist zweidimensional

Eine Grösse ist dreidimensional

Beispiel

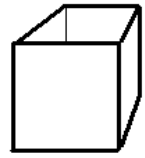
Die obige Kiste besteht aus einem Rahmen von 12 Stangen jeweils 1m lang. Die Fläche der Kiste besteht aus 6 Seiten jeweils $1\text{m} \times 1\text{m} = 1$ Quadratmeter. Die Grösse der Kiste ist ein Quader $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m} = 1$ Kubikmeter.

Jetzt möchten wir eine ähnliche Kiste aus 12 Stangen bauen, die jeweils 2m lang sind.

- Eine Seite ist nun $2\text{m} \times 2\text{m} = 4$ Quadratmeter
- Die Grösse ist ein Quader $2\text{m} \times 2\text{m} \times 2\text{m} = 8$ Kubikmeter

Übungen

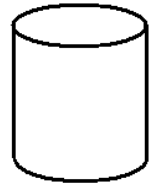
1. Rechts abgebildet ist ein Behälter, der 10cm hoch, 10cm breit und 10cm tief ist. Dieser Behälter hat eine Kapazität von genau einem Liter.



a) Wie viel beinhaltet ein Behälter, der 20cm hoch, 20cm breit und 20cm tief ist?

b) Wie viel beinhaltet ein Behälter, der 40cm hoch, 10cm breit und 10cm tief ist?

Rechts abgebildet ist ein runder Topf. Dieser Topf ist 20cm breit und 30cm hoch, und beinhaltet 10 Liter.



c) Wie viel beinhaltet ein Topf, der 40cm breit und 15cm hoch ist?

d) Wie viel beinhaltet ein Topf, der 10cm breit und 60cm hoch ist?

2. Du hast einen Würfel, der aussen schwarz und innen weiss ist. Der Würfel ist 3cm gross. Du schneidest den Würfel, um eine ganze Menge von 1cm Würfeln zu bekommen.

a) Wie viele 1cm Würfeln bekommst du?

b) Wie viele Schnitte brauchst du?

c) Wie viele von den kleinen Würfeln haben

- 4 schwarze Seiten?
- 3 schwarze Seiten?
- 2 schwarze Seiten?
- 1 schwarze Seite?
- keine schwarze Seiten?

„X marks the spot“

Lektion – Gleichungen

Du hast in der Schule tausende Gleichungen geschrieben, z.B.

$$3 + 4 = 7$$

Das wichtigste Attribut einer Gleichung: die beiden Seiten sind gleich (macht Sinn, oder?). Du kannst eine Gleichung ändern – solange du dieselbe Änderung auf beiden Seiten machst, bleibt die Gleichung korrekt:

$$1 + 3 + 4 = 7 + 1$$

1 zu beiden Seiten addieren

$$(1 + 3 + 4) : 2 = (7 + 1) : 2$$

Beide Seiten durch 2 dividieren

Um eine Gleichung einfacher zu machen, kannst du auch Berechnungen durchführen:

$$8 : 2 = (7 + 1) : 2$$

1 + 3 + 4 gibt 8

$$4 = (7 + 1) : 2$$

8 : 2 gibt 4

$$4 = 8 : 2$$

7 + 1 gibt 8

Wieso möchten wir Gleichungen ändern? Das siehst du denn gleich...

Lektion – Der mysteriöse X

Du kennst solche Probleme:

„Ein Apfel kostet Fr. 0.20. Wie viele Äpfel kannst du für Fr. 1.00 kaufen?“

Mit Hilfe solcher einfachen Beispiele lernen wir eine Methode, die uns nachher mit komplexeren Problemen hilft.

Wir arbeiten mit einer Gleichung:

$$0.20 \cdot X = 1.00$$

Diagramm zur Gleichung $0.20 \cdot X = 1.00$:

- Ein Kasten mit der Aufschrift *Preis eines Apfels* ist mit einer Linie mit der Zahl **0.20** verbunden.
- Ein Kasten mit der Aufschrift *Was wir wissen wollen* ist mit einer Linie mit dem Buchstaben **X** verbunden.
- Ein Kasten mit der Aufschrift *Unser Taschengeld* ist mit einer Linie mit der Zahl **1.00** verbunden.

In diesem Problem müssen wir die Anzahl Äpfel entdecken – dies ist am Anfang unbekannt. In der Gleichung markieren wir den unbekanntem Wert mit dem mysteriösen X.

Wie können wir X entdecken? Es gibt ein einziges Ziel: die Gleichung ändern, bis X ganz alleine ist. In diesem Beispiel:

$$(0.2 \cdot X) : 0.2 = 1.00 : 0.2$$

beide Seiten durch 0.2 dividieren

$$X = 1.00 : 0.2$$

0.2 : 0.2 gibt 1 (dürfen wir das wirklich?)

$$X = 5$$

1 : 0.2 gibt 5 – unsere Antwort!

Übungen an der Tafel

Wir probieren die „X“ Methode aus...

1. Tim ist fünf Jahre jünger als seine Schwester. Seine Schwester ist 7 Jahre alt. Wie alt ist Tim?

Unbekannt: Tim's Alter ist „X“

Gleichung: $X + 5 = 7$

Vorgang: $X + 5 - 5 = 7 - 5 = 2$ von beiden Seiten 5 subtrahieren

$X = 7 - 5$ berechnen

$X = 2$ berechnen

2. Nun etwas schwieriger: Wenn Tim 3 Jahre älter wäre, wäre er halb so alt wie seine Schwester. Seine Schwester ist 18 Jahre alt. Wie alt ist Tim?

Unbekannt: Tim's Alter ist „X“

Gleichung: $(X + 3) \cdot 2 = 18$ warum sind die Klammern nötig?

Vorgang: $(X + 3) \cdot 2 : 2 = 18 : 2$ beide Seiten durch 2 dividieren

$(X + 3) = 9$ berechnen (beide Seiten)

$X + 3 = 9$ Klammern nicht mehr nötig

$X + 3 - 3 = 9 - 3$ von beiden Seiten 3 subtrahieren

$X = 6$ berechnen (beide Seiten)

Übungen

Löse die folgenden Gleichungen:

$$3 \cdot X + 4 = 10$$

$$2 \cdot X - 8 = 9 - 7$$

$$5 \cdot X + 5 = 60$$

$$12 \cdot X - 4 = 80$$

$$23 \cdot X + 12 = 58$$

$$8 \cdot X + 5 = 125$$

Übungen

Löse die folgenden Probleme mit der „X“ Methode!

1. Becky hat eine Seile, die dreimal so lang ist, wie Becky gross ist. Becky ist 120cm gross. Wie lang ist die Seile?

2. Albert ist eine Affe. Albert ist jetzt halb so alt, wie seine Mutter in drei Jahre sein wird. Seine Mutter ist jetzt 9 Jahre alt. Wie alt ist Albert?

3. Vor drei Jahre war Albert ein Drittel so alt wie seine Mutter in 2 Jahren sein wird. Seine Mutter ist jetzt 10 Jahre alt. Wie alt ist Albert?

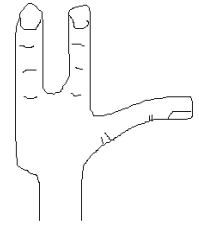
Schöne Probleme 2

Lektion

Heute versuchen wir nur ein Paar verschiedene Probleme zu lösen.

Übungen

1. Auf einem fernen Planeten gibt es ausserirdische Wesen mit nur zwei Fingern und einem Daumen an jeder Hand. Wo Menschen bis 10 zählen, zählen diese Wesen nur bis 6.



In der Tabelle rechts siehst du die ersten Zahlen, die wir und sie verwenden. Die Zahl 7 bei uns ist für sie die Zahl 11.

Menschen zählen	Ausserirdische zählen
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	10
7	11
8	12
9	13
10	14
11	15
12	20
13	21

Ergänze in der Tabelle unten die fehlenden Einträge:

Menschen zählen	Ausserirdische zählen
7	11
24	
	24
17	
	33

2. Ralf will ein neues Auto. Er kann ein gewöhnliches Auto G kaufen, oder ein Hybrid-Auto H.

- Auto G braucht 8 Liter Benzin pro 100 km. Der Kaufpreis dieses Autos ist Fr. 40'000.

- Auto H braucht 5 Liter Benzin pro 100 km. Der Kaufpreis dieses Autos ist Fr. 60'000.

a) Ralf fährt jedes Jahr 15'000 km. Wie viel Benzin würde er mit beiden Autos brauchen? Wenn Benzin Fr. 2.00 pro Liter kostet, wie viel würde er mit beiden Autos ausgeben?

	Benzin (Liter)	Kosten (Fr.)
Auto G		
Auto H		

b) Auto H ist teurer, die Ausgaben für Benzin aber tiefer. Wie viele Jahre muss er sein neues Auto behalten, damit der Kauf von Auto H sich lohnt?

3. Du hast eine gewisse Menge Spannplatte, und solltest daraus einen Würfel bauen, d.h. mit sechs Seiten (Boden, vier Wände und Deckel). Du musst nachher sagen, wie lang die Kanten sind (in Meter) und wie gross der Würfel ist (Volumen in Kubikmeter).

a) (Leicht) Du hast 6 Quadratmeter Spannplatte für den Würfel

Wie lang sind die Kanten _____

Was ist das Volumen _____

b) (Mittel) Du hast nun 24 Quadratmeter Spannplatte für den Würfel

Wie lang sind die Kanten _____

Was ist das Volumen _____

Addition von Bruchteilen

Lektion

Wenn man verschiedene Bruchteile hat, die man zusammenzählen will, kann es kompliziert werden.

Als Beispiel: du hast das Kuchen in 6 geteilt. Deine Schwester isst nur die Hälfte von ihrem Stuck und gibt dir den Rest. Welchen Anteil vom ganzen Kuchen hast du nun am Teller?

1/6 Stuck plus 1/12 von der Schwester

Beispiele

$$1/2 + 1/2 = 1$$

$$1/6 + 2/3 = 5/6$$

Übungen

a) $1/2 + 1/4 =$

b) $1/3 + 1/6 =$

c) $1/4 + 1/3 =$

d) $1/3 + 1/6 + 1/2 =$

e) $3/4 + 1/4 =$

f) $1/2 + 1/3 =$

g) $2/5 + 1/10 =$

h) $1/5 + 2/15 + 2/3 =$

Und „just for fun“

"Dad, where had you been?" asked Bill.

"I had been to the attic, my son," replied Dad. "And do you know what I saw there? There was a big web with 14 spiders and flies on it."

"How many spiders were there?" asked the little boy with curiosity.

"Well, there were a total of 98 legs on the web," answered Dad with a smile. "Now you can find out how many spiders were there by yourself. Can't you?"

Schöne Probleme 3

1. Ein Viereck 1cm breit und 1cm hoch hat eine Fläche von $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ oder 1 Quadratcentimeter. Ein Viereck 2cm breit und 2cm hoch hat eine Fläche von $2\text{cm} \times 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$.

a) Du hast ein Viereck 3cm breit und 3cm hoch. Dieses Viereck hat ein Loch in der Mitte, 1cm breit und 1cm hoch. Was ist die übrige Fläche dieses Objekts?

b) Du hast ein Viereck 4cm breit und 4cm hoch. Dieses Viereck hat ein Loch in der Mitte, 2cm breit und 2cm hoch. Was ist die übrige Fläche dieses Objekts?

Das Volumen eines Würfels berechnet man, indem man das Produkt Breite \times Höhe \times Tiefe berechnet. Sind alle Abmessungen in cm, dann ist das Volumen in Kubikcentimeter (cm^3) gegeben.

c) Was ist das Volumen eines Würfels, dessen Breite, Höhe und Tiefe jeweils 5cm beträgt?

d) Was ist das übrige Volumen des Würfels von (c), wenn es in der Mitte des Würfels ein Loch gibt, dessen Breite, Höhe und Tiefe jeweils 3cm beträgt?

2. Aiden ist 12, Tynan ist 10 und Brad ist 47. Gehe davon aus, dass wir immer gleichzeitig ein Jahr älter werden – d.h. nächste Jahr sind wir 13, 11 und 48.

a) Wie alt sind wir alle, wenn Aiden genau halb so alt ist wie Brad?

b) Wie alt sind wir alle, wenn Tynan genau halb so alt ist wie Brad?

c) Wie alt sind wir alle, wenn die Summe von Aidens und Tynans Alter genau die Hälfte vom Brad's Alter ist?

3. Ergänze die nächsten zwei Zahlen der folgenden Sequenzen:

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, _____, _____, ...

1, 2, 4, 8, 13, 20, 28, _____, _____, ...

Der Rückkehr vom mysteriösen X

Lektion

Lösen wir die folgende Probleme mit „X“:

1. „Wenn Tim fünf Jahre jünger wäre, wäre er halb so alt wie seine 18-jährige Schwester. Wie alt ist Tim?“

Unbekannt:: Tim's Alter ist „X“

$$\text{Gleichung: } (X - 5) \cdot 2 = 18$$

$$\text{Vorgang: } (X - 5) \cdot 2 : 2 = 18 : 2 \quad \text{beide Seiten durch 2 dividieren}$$

$$(X - 5) = 9 \quad \text{beide Seiten berechnen}$$

$$X - 5 + 5 = 9 + 5 \quad \text{beide Seiten plus 5}$$

$$X = 14 \quad \text{berechnen}$$

2. Kennt ihr noch das Problem mit Bahnbillets? Lösen wir die erste Frage:

Brad wohnt in Schönenwerd und arbeitet in Basel. Er möchte so günstig wie möglich mit der Bahn reisen. Ein normales Billet (hin und zurück) kostet Fr. 40. Kauft er einen „Halbtax“ für Fr. 150, kostet ein Billet nach Basel nur noch Fr. 20. Wie viele Reisen muss Brad machen, damit es sich lohnt, einen Halbtax zu kaufen?

Wir suchen die Anzahl Reisen, womit beide Alternative gleich teuer sind.

Unbekannt:: Anzahl Reisen X

$$\text{Gleichung: } 40 \cdot X = 150 + 20 \cdot X$$

Das ist aber komisch: X kommt zweimal vor! Was machen wir?

Erinnerst du immer an unser Ziel: X ganz alleine. Der erste Schritt wäre, beide „X“ auf die gleiche Seite zu bringen. Wir subtrahieren $20 \cdot X$ von beiden Seiten

$$40 \cdot X - 20 \cdot X = 150 + 20 \cdot X - 20 \cdot X$$

berechnen...

$$20 \cdot X = 150$$

Jetzt haben wir nur 1mal „X“ - nun beide Seiten durch 20

$$X = 150 : 20$$

$$X = 7.5$$

Übungen

Was ist der Wert von X in den folgenden Gleichungen?

$$2 \cdot X - 6 = 8$$

$$3 + X = 2 \cdot X - 9$$

$$10 \cdot X = 42 - 4 \cdot X$$

$$34 - X = X - 20$$

$$3 \cdot X + 9 = 4 \cdot X + 3$$

Noch mehr mit dem mysteriösen „X“

Lektion

Wenn wir Änderungen machen, müssen wir gewisse Regeln beachten. Mathematische Operationen (+, -, •, :) haben eine Reihenfolge, die wichtig sein kann.

Welche der folgenden Gleichungen sind korrekt?

$$2 + 4 = 4 + 2$$

$$2 - 4 = 4 - 2$$

$$2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$$

$$2 : 4 = 4 : 2$$

Regel: Mit + und • ist die Reihenfolge egal, aber mit - und : ist die Reihenfolge wichtig.

Beispiele:

$$5 + X + 5 = X + 5 + 5 = X + 10 \quad \text{richtig!}$$

$$30 : x : 2 = X : 30 : 2 = X : 15 \quad \text{unsinn!}$$

Hat $(2 \cdot 3) + 4$ den gleichen Wert wie $2 \cdot (3 + 4)$? Was ist der Wert von $2 \cdot 3 + 4$?

Regel: wenn du Klammern hast, dann bestimmen sie die Berechnung.

Regel: wenn du eine Mischung hast, und keine Klammern, dann • und : zuerst berechnen.

Schauen wir das erste Beispiel von letzter Woche wieder an. Was ist falsch mit:

Gleichung: $(X - 5) \cdot 2 = 18$

Vorgang: $(X - 5 + 5) \cdot 2 = 18 + 5$ beide Seiten plus 5

$$(X) \cdot 2 = 23 \quad \text{beide Seiten berechnen}$$

$$X \cdot 2 : 2 = 23 : 2 \quad \text{beide Seiten durch 2 dividieren}$$

$$X = 11.5 \quad \text{berechnen}$$

Regel: Unsere Änderungen müssen immer die ganze Seite betreffen – nie nur ein Teil.

Übungen

1. Was hat X für einen Wert in den folgenden Gleichungen?

$$7 \cdot X + 5 = 33$$

$$2 \cdot X + 20 = 5 \cdot X + 2$$

$$3 \cdot X - 18 = X + 6$$

2. Verwende die X-Methode, um das folgende Problem zu lösen

Wenn du Tim's Alter verdoppelst und dann zwanzig dazu zählst, hast du die gleiche Nummer wie wenn du zehn von seinem Alter subtrahierst und das Resultat mit drei multiplizierst. Wie alt ist Tim?

a) Wie stellst du dieses Problem als Gleichung dar?

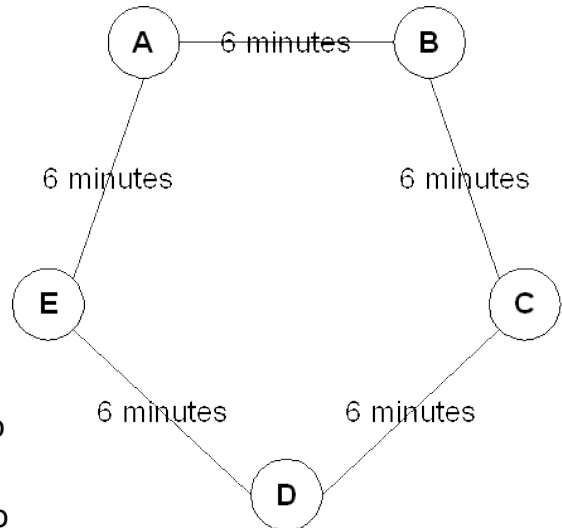
b) Löse die Gleichung, um den Wert von X zu entdecken!

A new tram in Basel

Basel is planning a new tram line. The tram will travel on a circular route, and will serve five stations. The time between stations is six minutes, so the time for a complete route will be exactly 30 minutes.

The city has estimated the number of passengers per hour, and what routes they will want to travel. This information should be used to determine how many trams are needed on the route. Here are the estimates:

- 100 passengers per hour will travel from A to D
- 100 passengers per hour will travel from B to D
- 100 passengers per hour will travel from C to E
- 200 passengers per hour will travel from C to A
- 100 passengers per hour will travel from E to D



Several trams can run at the same time. For example, one tram could be at station A while another is at station C. However, since there will be only a single track, all trams must travel in the same direction.

Each tram holds at most 50 passengers.

A. Assume the trams travel clockwise around the circle. How many trams are required to transport all of the passengers?

B. Assume the trams travel counter-clockwise around the circle. How many trams are required to transport all of the passengers?

C. How long is the average trip for passengers, if the trams travel clockwise?

D. How long is the average trip for passengers, if the trams travel counter-clockwise?

Sheep or Cows?

Rusty Smith has just bought himself a ranch in the USA. His ranch has 600 hectares of land (a hectare is 100m by 100m), and he wants to put a herd cows or sheep on the ranch. He doesn't want to feed the animals, so they need a lot of land to graze.

He doesn't know whether to have cows or sheep. He find out that a cow needs 10 hectares to live on, and a sheep only needs 2 hectares.

a) If he only has cows, how many cows can his land support? How many sheep?

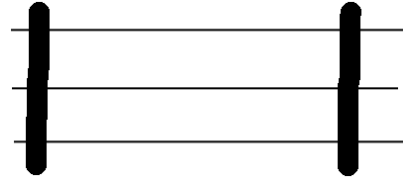
b) If he wants half of the land to go to cows, and half to sheep, how many cows and sheep will he have?

c) If he wants to have the same number of cows as sheep, how many animals of each kind will he have? How much land will the cows have, and how much will the sheep have?

d) He is also considering having some goats. 1 cow or 5 sheep take the same amount of land as 6 goats. Suppose he want twice as many sheep as cows and three times as many goats as sheep. how many animals of each kind will he have?

Fences

You work for a fencing company – you put up fences around farmers' fields. Your fences are made of 3 wires attached to wooden posts, and there has to be a post every 5 meters. You charged Fr. 24 for every fencepost that you install, and Fr. 400 for every kilometer of wire.



a) You install a fence around a field that measures 50 meters by 100 meters. How much does the fence cost?

b) A customer pays you Fr. 3000 to fence a square field. How big is the field?

c) Another customer wants a fence to run in a straight line along a road. The fence is 500 meters long. How much does it cost?

Vergleiche

1. Wenn du Tim's Alter verdoppelst und dann fünf dazu zählst, hast du die gleiche Nummer wie wenn du zwei zu seinem Alter zählst und das Resultat mit drei multiplizierst. Wie alt ist Tim?

2. Du möchtest ein neues Abo für dein Mobiltelefon. Es gibt zwei mögliche Programme. Entweder kannst du Fr. 30 pro Monat plus Fr. 0.05 pro Minute zahlen, oder du kannst Fr. 10 pro Monat, plus Fr. 0.10 pro Minute zahlen.

a) Wie viele Minuten pro Monat musst du telefonieren, damit die zwei Programme gleich teuer sind?

b) Welches Programm ist günstiger, wenn du 100 Minuten pro Monat telefonierst?

Schöne Probleme 4

1. Die Summe aller Zahlen von 0 bis 9 ist: $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$.

a) Was ist die Summe aller Zahlen von 0 bis 99? Versuche dieses Problem zu lösen, ohne alle Zahlen zu addieren – es gibt einen besseren Weg!

b) Was ist die Summe aller Zahlen von 0 bis 999?

2. Menschen verwenden ein dezimales Zahlensystem. Dezimal bedeutet, dass wir 10 Ziffern (0 bis 9) verwenden.

Computer verwenden ein binäres Zahlensystem. Binäre bedeutet, dass sie lediglich zwei Ziffern verwenden: 0 und 1.

Rechts siehst du ein Vergleich dieser Zahlensysteme.

Ergänze die fehlenden Einträge in der Tabelle unten:

Dezimal	Binär
7	111
17	
	1111
20	
	10010

Dezimal	Binär
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101

3. Ein Gärtner pflanzt ein Blumenbeet in vier Stunden, wobei das Blumenbett 4m x 4m gross ist.

a) Wie viele Quadratmeter pflanzt er in einer Stunde?

b) Wie lang benötigt der Gärtner ein grösseres Blumenbeet zu pflanzen, wenn das Blumenbeet 8m x 8m gross ist?

c) Wie lang benötigt der Gärtner ein grösseres Blumenbeet zu pflanzen, wenn das Blumenbeet 6m x 6m gross ist?

4. Ein runder Luftballon wird aufgeblasen. Wenn der Luftballon 1 Liter Luft beinhaltet, ist es 12cm breit. Wie breit wird der Luftballon sein, wenn er 8 Liter Luft beinhaltet?

5. Ab nächstes Jahr bieten dir deine Eltern dir die folgenden Optionen für Taschengeld:

a) Du bekommst Fr. 10 pro Monat

b) Du bekommst Fr. 0.5 im Januar. Im Februar bekommst du das doppelte. Im März bekommst du das doppelte vom Februar, usw – jeden Monat zweimal so viel wie im vorherigen Monat.

c) Du bekommst Fr. 2 im Januar, Fr. 4 im Februar, Fr. 6 im März – jeden Monat Fr. 2 mehr.
Mit welchem Programm erhältst du insgesamt am meisten?